NO.

18/12/18 Date

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\boxed{n \geq 2}$ και $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Η f ονομάζεται $k+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη αν είναι k φορές μερικώς διαφορίσιμη και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $k+1$ τάξης της f

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} : U \to \mathbb{R} \quad \forall i_1, \ldots, i_{k+1} = 1, \ldots, n$$

Η f ονομάζεται $k+1$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη αν είναι $k+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη και όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης $\leq k+1$ είναι συνεχείς.
Συμβολισμός: $f \in C^{k+1}(U)$

Στην πιο απλή περίπτωση $(k=1)$ μια $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\boxed{n \geq 2}$ λέγεται δύο φορές μερικώς διαφορίσιμη αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης

$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$ και $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R} \quad \forall (i,j) = (1, \ldots, n)$$

NO.

Date

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = xy + (x+2y)^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(n=2)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 2(x+2y)$, $\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2(x+2y)\cdot 2$ $(k=1)$

$\cancel{(k=1)}$ $(k+1=2)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y+2(x+2y))$
$= 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y + 2(x+2y)) = 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 4(x+2y)) = 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(5x + 8y) = 8$

Αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις λέμε ότι η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι C^2, γράφουμε $f \in C^2(U)$.

Π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
Ειδικότερα, εδώ, $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Σύμβαση: $f \in C^1(U) \Leftrightarrow f$ συνεχώς διαφ/μη $\Leftrightarrow$ όλες οι μερικές παράγωγοι (πρώτης) τάξης $\exists$ και είναι συνεχείς, $f \in C^0(U) \Leftrightarrow f \in C(U) \Leftrightarrow f$ συνεχής]

$\frac{\partial^0 f}{\partial x^0}$ ||

Παρατήρηση: Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει ότι ~~το~~ πολυώνυμα του $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ οποιουδήποτε βαθμού είναι $\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, ρητές συναρτήσεις είναι $\in C^\infty(U)$ με $U=\mathbb{R}^n \setminus \{\text{ρίζες του παρονομαστή}\})$

Για $i_1=i_2=\dots=i_k\in\{1,\dots,n\}$ γράφουμε:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}} =: \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^k}$$

(π.χ. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$) Αν οι δείκτες $i_1,\dots,i_k$ δεν είναι όλοι ίδιοι, η μερική παράγωγος ονομάζεται ~~μερική~~ **μεικτή** π.χ. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Πότε ισχύει αυτό?

Απάντηση: **Θεώρημα Schwarz**

Έστω $f\in C^2(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $n\geq 2$. Τότε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}, \quad \forall i,j=1,\dots,n$$

(Γενίκευση) Πόρισμα: Έστω $f\in C^k(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$, ανοιχτό, $n\geq 2$. Τότε

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}$$

$\forall i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,n\}$ και για κάθε μετάθεση π των δεικτών $1,\dots,k$

NO.

Date

Π.χ. Αν $f \in C^3(U)$ και $U \subset \mathbb{R}^4$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_4 \partial x_2 \partial x_1}\left(= \frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \dots = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_4}$$

Θεώρημα Taylor

Προαπαιτούμενα (συμβολισμοί) Ορισμός: Ένα διάνυσμα $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, (δηλ. διάνυσμα με συντεταγμένες μη αρνητικούς ακεραίους) ονομάζεται πολυδείκτης (multi-index) τάξης $|a| := a_1 + \dots + a_n$ με $a! = a_1! \dots a_n!$ (με $0! = 1$ και $a_i! = a_i(a_i - 1) \dots 1$)

Επίσης, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\bar{x}^a = (x_1, \dots, x_n)^a = (x_1, \dots, x_n)^{(a_1, \dots, a_n)} := x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

και $D^a f(\bar{x}) := \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}(\bar{x})$

Π.χ. για $n = 3$, $a = (1, 0, 6)$ $D^a f(x, y, z) = \frac{\partial^7 f}{\partial x \partial z^6}(x, y, z)$

(για $f \in C^{|a|}(U)$)

NO.

Date

Θεώρημα Taylor: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$.
Έστω $f \in C^k(U)$ $(k \in \mathbb{N})$, τότε

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = \underbrace{\sum_{|a| \le k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a}_{} + o(\|\bar{h}\|^k) \text{ για } \bar{h} \to 0$$

$=: T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h})$ ⇝ Το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$

(Δηλ. $f(\bar{x}+\bar{h}) = T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h}) + g(\bar{h})$ με:
$\underbrace{g(\bar{h}) = o(\|\bar{h}\|^k) \text{ για } \bar{h} \to \bar{0}}$

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{g(\bar{h})}{\|\bar{h}\|^k} = 0 \text{ δηλ. } \lim_{\bar{h} \to 0} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h})}{\|\bar{h}\|^k} = 0$$

$$= \sum_{i=j}^{n} \underbrace{\frac{D^{2\bar{e}_i} f(\bar{x})}{(2\bar{e}_i)!} \bar{h}^{2\bar{e}_i}}_{= \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} \frac{1}{2} h_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{\frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(x)}{|\bar{e}_i+\bar{e}_j|!} \bar{h}^{\bar{e}_i+\bar{e}_j}}_{= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) h_i h_j} =$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H_f(\bar{x}) \bar{h} + o(\|\bar{h}\|)^2$$

για $\|\bar{h}\| \to 0$

όπου $H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ - Εσσιανός πίνακας

$= D^2 f(\bar{x})$

NO

Date

$|a| = 0 \Rightarrow a = (0, \dots, 0)$

$|a| = 1 \Rightarrow a = \bar{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow f(\bar{x} + \bar{u}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\sum_{|u|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a^2} \bar{u}^a}$ $+ o(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{D^{\bar{e_i}} f(\bar{x})}{\bar{e_i}\,!} \bar{u}^{\bar{e_i}} = u_1^? \cdot u_2^? \cdots u_{i-1} u_i^? \cdot u_{i+1}^? \cdots u_\infty^? =$

$= 0! + 0! ? \dots 0! = 1$

$D^{\bar{e_i}} f(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1^a \partial x_2^? \cdots \partial x_n^2} = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right) \Rightarrow$

$= 1 \dots \partial x_n = 1$

$\Rightarrow f(\bar{x} + \bar{u}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} u_i}_{= \nabla f(\bar{x}) \bar{u} \, = D f(\bar{x})} + o(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to 0$

Δηλ. $\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x} + \bar{u}) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$ δηλ. f διαφ. στο $\bar{x} = \bar{0}$.

$\boxed{n = 2}$ $f \in C^2(\mathcal{U}) \Rightarrow f(\bar{x} + \bar{u}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})\bar{u} +$
$\sum_{|u|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a + (\|\bar{u}\|^2)$ για $\bar{u} \to 0$

Εδώ $|a| = 2 \Rightarrow a = (a_1, \dots, a_n) = \dots$
$\Rightarrow a = (0, \dots, \underset{i\text{-θέση}}{2}, 0, \dots, 0) = +a + \bar{e_i} + \bar{e_j}$

συνολο $= a + 2 + 0u$

$i, j = 1, \dots, n$
$(i \neq j)$

$\vee\ a = (0, \dots, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$ $(i \neq j)$

$\Rightarrow \sum_{|a|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} \frac{D^{\bar{e_i} + \bar{e_j}} f(\bar{x})}{(\bar{e_i} + \bar{e_j})!} \bar{u}^{\bar{e_i} + \bar{e_j}} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{2\bar{e_i}} f(\bar{x})}{(2\bar{e_i})!} \bar{u}^{2\bar{e_i}} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{D^{\bar{e_i} + \bar{e_j}} f(\bar{x})}{(\bar{e_i} + \bar{e_j})!} a^{\bar{e_i} + \bar{e_j}}$ $= u_1^0 \cdot u_i^? \cdots u_j^? \cdots u_\infty^0 = u_i \cdot u_j$